Лекция 8.
Нахождение сечения рассеяния через фазы рассеяния

Цель. Описать фазовый метод для расчета сечений рассеяния

Одним из основных теоретических методов исследования рассеяния является метод парциальных волн. Этот метод предложен Факсеном и Хольцмарком и аналогичен методу, развитому Рэлеем в классической теории рассеяния. Отправной точкой является уравнение Шрёдингера для частицы, рассеивающейся некоторым центральным полем с потенциалом $U(r)$:

$$\left[\Delta + k^2 - U(r)\right]\psi(r) = 0, \quad U(r) = \frac{2m}{\hbar^2}\Phi(r) \tag{8.1}$$

Решение уравнения ищется в виде

$$\psi(r) \to \exp(ikz) + \frac{\exp(ikr)}{r} f(\vartheta) \quad , \tag{8.2}$$

которое на больших расстояниях описывает падающую плоскую волну (распространяющуюся вдоль оси z) и расходящуюся сферическую волну; здесь ϑ - угол между направлениями рассеянной $(\vec{k}')$ и падающей волн $(\vec{k})$. Принимая во внимание, что потенциал $U(r)$ центрально симметричен, выражение (6.2) не зависит от азимутального угла φ в сферической системе координат.

Интенсивность рассеянной волны в телесном угле $d\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\varphi d\vartheta$ пропорциональна

$$\left| f(\vartheta) \right|^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \tag{8.3}$$

Величина $f(\vartheta)$, имеющая размерность длины, получила название амплитуды рассеяния, а величину (8.3) можно считать определением дифференциального сечения рассеяния

$$d\sigma = \left| f(\vartheta) \right|^2 d\Omega = \sigma(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi \tag{8.4}$$

Проводя интегрирование (8.4) по углу φ, получим общую формулу для полного сечения рассеяния

$$\mathrm{Q}^{\Pi}(\mathrm{E}) = 2\pi\int \left| f(\vartheta) \right|^2 \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi\int \sigma(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta \tag{8.5}$$

Величина $Q^{\Pi}(E)$ определяет полную вероятность того, что частица с энергией E будет рассеяна полем $U(r)$. Таким образом, основную задачу теории рассеяния можно сформулировать так: найти амплитуду рассеяния $f(\vartheta)$ через потенциал $U(r)$.

Функцию $f(\vartheta)$ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра, т.е. записать в виде

$$f(\vartheta) = \sum_l \alpha_l \frac{i}{2k}(2l+1)P_l(\cos\vartheta) \tag{8.6}$$

где α_l - коэффициенты, которые можно выразить через потенциал $U(r)$. Можно записать разложение падающей плоской волны по полиномам Лежандра

$$e^{ikz} = \exp(ikr\cos\vartheta) = \sum_{l=0}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\varphi) \quad , \tag{8.7}$$

где j_l - сферические функции Бесселя.

При больших значениях r асимптотическое выражение для функции Бесселя представляется в виде

$$j_l(kr) \to \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} \tag{8.8}$$

Подставляя (8.6 - 8.8) в формулу (8.2) получаем следующее асимптотическое разложение для волновой функции :

$$\psi(r) \to \frac{1}{2ikr}\sum_l (2l+1)\left[(1-\alpha_l)e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\right]P_l(\cos\varphi) \tag{8.9}$$

Использую сферическую симметрию потенциала $U(r)$, волновую функцию можно представить в форме

$$\psi(r) = \sum_l (2l+1)k^{-1}i^l \frac{1}{r}u_l(r)P_l(\cos\varphi) \, , \tag{8.10}$$

где функция $u_l(r)$ определяется уравнением

$$\frac{d^2u_l}{dr^2} + \left[k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l = 0 \tag{8.11}$$

Двумя линейно независимыми вещественными решениями свободного $(U \equiv 0)$ уравнения (8.11) являются известные функции Риккатти - Бесселя $j_l(kr)$ и $n_l(kr)$. Из требования конечности волновой функции следует, что свободному движению отвечает только регулярное в точке $r = 0$ решение $j_l(kr)$, так что в этом случае асимптотически при больших значениях r будет $u_l(r) \approx const \cdot \sin(kr - l\pi/2)$. При наличии потенциала в области, где $U(r)$ исчезает, волновая функция будет включать в себя добавку нерегулярного решения свободного уравнения $n_l(kr)$. Мерой этой добавки, количественно описывающей эффект взаимодействия, является фаза рассеяния δ_l, а волновая функция представляется как

$$u_l(r) \to kr\left[A_l j_l(kr) - B_l n_l(kr)\right] = C_l \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \tag{8.12}$$

где A_l, B_l - некоторые константы; постоянные C_l, δ_l связаны с A_l, B_l простыми соотношениями

$$tg\delta_l = \frac{B_l}{A_l}, \qquad C_l^2 = A_l^{\,2} + B_l^{\,2} \tag{8.13}$$

Подставляя (8.12) в (8.10), находим

$$\psi(r) \to \sum_l (2l+1)/(2ikr)C_l\left[\exp(ikr + i\delta_l) - (-1)^l \exp(-ikr - i\delta_l)\right]P_l(\cos\varphi) \tag{8.14}$$

Сравнивая (8.9) с (8.14), находим

$$\alpha_l = [1 - \exp(2i\delta_l)], \qquad C_l = \exp(i\delta_l) \tag{8.15}$$

Подставляя это выражение в формулу (8.6), получаем

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)\left[\exp(2i\delta_l) - 1\right]P_l(\cos\varphi) \tag{8.16}$$

и полное сечение может быть выражено через фазовые сдвиги

$$Q^{\Pi}(E) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l \tag{8.17}$$

Набор фазовых сдвигов для различных парциальных волн ($l = 0,1,2,...$) полностью характеризует процесс рассеяния, позволяя находить угловое распределение и полное сечение рассеяния.

Расчет фаз рассеяния заключается в решении уравнения Шредингера (8.11) для волновой функции и использовании асимптотического условия (8.12).

Литература:

1. Биберман Л.М.. Воробьев В.С.. Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982.
2. Митчнер М.. Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир. 1976.
3. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ. 1961.
4. Смирнов Б.М. Физика слабоионизованного газа. М.: Наука, 1978.
5. Мэзон Е., Вандерслайс Дж. Атомные и молекулярные процессы. п.р. Бейтса. М.:Мир, 1964.
6. Месси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновеия. М., 1971.
7. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М.. Квантовая механика. М.: Наука,1974.
8. Смирнов Б.М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М.: Атомизд., 1968.
9. Эбелинг В., Крефт В., Кремп Д. Теория связанных состояний и ионизационного равновесия в плазме и твердом теле 1979г., с.50-52.